Université Abdelmalek Assaâdi
FST Tanger/ Année 09-10/MIPC/M112

Série de TD n°4

Exercice1

- Soient

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^3 + x^5 \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0,$$
$$g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} - x^5 \ln x,\ x > 0.$$

Ces fonctions admettent-elles des développements limités d'ordre $1, 2, 2, 3, 4$ et 5 au point 0?

Exercice2

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^3 - 6x^2 + 7x - 5},$$

au voisinage de $x = 1$.

$1 - x - 1 = 0$

$x = 1 + 1$

2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3},$$

au voisinage de $x = 2$.

3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{x}},$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice3

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^n} - 1}{(\sin x)^n}$; $n \in \boldsymbol{N}^*$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

Exercice4

Soit f une fonction de classe C^2 de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

ETUSUP .com

Exercice 1 a/ $f(x) = 1+2x+x^2+4x^3+x^5 \sin\frac{1}{x}$

- On a $f(x) = 1+2x+x^2+4x^3+x^5\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \sin\frac{1}{x}$

On considère la suite $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et

$\varepsilon(x_n) = \sin\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right) = \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ diverge

donc $\varepsilon(x)$ n'a pas de limite en 0 et par suite f n'admet $DL_5(0)$

- De plus $f(x) = 1+2x+x^2+4x^3+x^4\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = x\sin\frac{1}{x}$

et $|\varepsilon(x)| = |x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \quad \forall x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{0}\varepsilon(x) = 0$ donc f admet $DL_4(0)$

et par suite f admet $DL_k(0)$; $k = 3,2,1,$

b/ $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} - x^5\ln x \quad x>0$

- On pose $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} - x^5\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \ln x$

$\lim\limits_{0^+}\varepsilon(x) = -\infty$ donc g n'admet pas $DL_5(0)$

- On pose $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} - x^4(x\ln x)$ avec $\varepsilon(x) = x\ln x$

$\lim\limits_{0^+}\varepsilon(x) = \lim\limits_{0^+} x\ln x = 0 \Rightarrow g$ admet un $DL_4(0)$ et par conséquent

g admet $DL_k(0)$; $k = 3,2,1$

Exercice 2 1/ On pose $X = x-1$; $x = X+1$

$$f(x) = \frac{(X+1)^2+3(X+1)-(X+1)}{2(X+1)^3-6(X+1)^2+7(X+1)-5} = \frac{X^2+5X+3}{2X^3+X-2} = \frac{X^2+5X+3}{-2(1-(X^3+\frac{X}{2}))}$$

$$= -\frac{1}{2}(X^2+5X+3)\left(1+(X^3+\frac{X}{2})+(X^3+\frac{X}{2})^2+(X^3+\frac{X}{2})^3+O(X^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(X^2+5X+3)\left(1+X^3+\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}+\frac{X^3}{8}+O(X^3)\right) = -\frac{1}{2}\left(3+\frac{13}{2}X+\frac{17}{4}X^2+\frac{41}{8}X^3+O(X^3)\right)$$

d'où $f(x) = -\frac{3}{2} - \frac{13}{4}(x-1) - \frac{17}{8}(x-1)^2 - \frac{41}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

2/ On pose $X = x-2$, $x = X+2$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+9}+3)}{X} = \frac{2\left[(1+\frac{X}{4})^{1/2}-1\right]\cdot 3\cdot\left[(1+\frac{X}{9})^{1/2}+1\right]}{X}$$

$$= \frac{6}{X}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{X^2}{16}+\frac{1}{16}\frac{X^3}{64}+o(X^3)-1\right)\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{9}-\frac{1}{8}\cdot\frac{X^2}{81}+o(X^2)+1\right)$$

ETUSUP .com

$$f(x) = \frac{6}{x}\left(\frac{x}{8} - \frac{x^2}{128} + \frac{x^3}{1024} + o(x^3)\right)\left(2 + \frac{x}{18} - \frac{x^2}{648} + o(x^2)\right) = 6\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{144} - \frac{x^2}{5184} - \frac{x}{64} - \frac{x^2}{2304} + \right.$$

$$= \frac{3}{2} + \quad (x-2)^2 + \quad (x-2)^2 + o((x-2)^2 \quad + o(x^2)$$

3/ $f(x) = e^{1/x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ On pose. $X = 1/x$

$$f(x) = e^X (1+X)^{1/2} = \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{X^2}{2} + o(X^2) = 1 + \frac{3}{2}X + \frac{7}{8}X^2 + o(X^2)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercices

a/ $e^X = 1 + X + X\varepsilon(X) \Rightarrow e^{x^n} = 1 + x^n + x^n\varepsilon(x)$

$\sin x = x + x\,\varepsilon'(x) \Rightarrow \sin^n x = x^n + x^n\varepsilon'(x)$

$$\frac{e^{x^n} - 1}{\sin^n x} = \frac{x^n(1+\varepsilon(x))}{x^n(1+\varepsilon'(x))} = \frac{1+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon'(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1+0}{1+0} = 1$$

b/ On pose $X = \frac{1}{x}$; $x = \frac{1}{X}$

$$x^2\left(e^{1/x} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) = \frac{1}{X^2}\left(e^X - e^{\frac{X}{1+X}}\right) = \frac{e^X}{X^2}\left(1 - e^{\frac{X}{1+X} - X}\right) = \frac{e^X}{X^2}\left(1 - e^{\frac{-X^2}{1+X}}\right)$$

$$-\frac{X^2}{1+X} = -X^2 \times \frac{1}{1+X} = -X^2(1 - X + o(X)) = -X^2 + X^3 + o(X^3)$$

$$e^{-X^2 + X^3 + o(X^3)} = 1 - X^2 + X^3 + o(X^3) \quad \text{d'où} \quad \frac{1 - e^{\frac{-X^2}{1+X}}}{X^2} = \frac{X^2 - X^3 + o(X^3)}{X^2} = 1 - X + o($$

$\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{1 - e^{\frac{-X^2}{1+X}}}{X^2} = \lim\limits_{X\to 0} 1 - X + o(X) = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

c/ $$\frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1} = \frac{e^{x\ln\sin x} - 1}{e^{x\ln x} - 1} = \frac{e^{x\ln\sin x} - 1}{x\ln\sin x}\cdot\frac{x\ln x}{e^{x\ln x} - 1}\cdot\frac{\ln\sin x}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\sin x} - 1}{x\ln\sin x} \underset{X = x\ln\sin x}{=} \lim_{X\to 0}\frac{e^X - 1}{X} = 1 \qquad \left(\lim_{0^+} x\ln\sin x = \lim_{0^+} \sin x\ln\sin x \cdot \frac{x}{\sin x} = 0\times 1 =\right.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{e^{x\ln x} - 1} \underset{Y = x\ln x}{=} \lim_{0^+}\frac{Y}{e^Y - 1} = 1 \quad ; \quad \lim_{0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{H}{=} \lim\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{0^+}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x} = 1\times 1 = 1$$

d'où $\lim\limits_{x} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1} = 1$

ETUSUP .com

ETUSUP .com

1/ On pose $X = x - \frac{\pi}{2}$ alors $x = X + \frac{\pi}{2}$;

$$(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = (1-\sin x)^{-\frac{1}{\sin x}} = e^{-\frac{1}{\sin x}\ln(1-\sin x)} = e^{\frac{\ln(1-\sin x)}{-\sin x}} \underset{Y=-\sin x}{=} e^{\frac{\ln(1+Y)}{Y}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{1/\cos x} = \lim_{Y\to 0} e^{\frac{\ln(1+Y)}{Y}} = e^1 = e$$

1/ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{X\to+\infty} e^{x^2\ln\cos\frac{1}{x}} \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \lim_{X\to 0} e^{\frac{\ln\cos X}{X^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

car $$\lim_{X\to 0}\frac{\ln\cos X}{X^2} \overset{H}{=} \lim_{X\to 0}\frac{-\frac{\sin X}{\cos X}}{2X} = \lim_{X\to 0} -\frac{\sin X}{X}\cdot\frac{1}{2\cos X} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 4 f de classe $C^3([0,1])$; $f(0)=0$

1/ $$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x) \quad ; \ 0<\theta<1$$

Pour $x = \frac{p}{n^2}$ on obtient : $$f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \frac{p}{n^2}f'(0) + \frac{p^2}{2n^4}f''(0) + \frac{p^3}{6n^6}f'''\left(\frac{\theta p}{n^2}\right)$$

2/ $$U_n = \sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}f'(0) + \sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{2n^4}f''(0) + \sum_{p=1}^{n}\frac{p^3}{6n^6}f'''\left(\frac{\theta p}{n^2}\right)$$

$$U_n = \frac{f'(0)}{n^2}\cdot\sum_{p=1}^{n} p + \frac{f''(0)}{2n^4}\sum_{p=1}^{n} p^2 + \frac{1}{6n^6}\cdot\sum_{p=1}^{n} p^3 \cdot f'''\left(\frac{\theta p}{n^2}\right)$$

$$U_n = \frac{f'(0)}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{f''(0)}{2n^4}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + R_n$$

$$U_n = f'(0)\cdot\frac{n+1}{2n} + f''(0)\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + R_n$$

3/ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = 1/2$, $\lim_{+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0$

f de $C^3([0,1])$ donc f''' est cont sur $[0,1] \Rightarrow f'''$ est cont à droite de 0

or la suite $x_n = \frac{\theta p}{n^2}$ tend vers 0 à l'infini donc $f'''(x_n)$ tend vers $f'''(0)$

par conséquent la suite $f'''(x_n)$ est bornée car $\exists M>0 : \|f'''(x_n)\| \le M$

d'où $$|R_n| = \left|\sum_{p=1}^{n}\frac{p^3}{6n^6}f'''(x_n)\right| \le \sum_{p=1}^{n}\frac{p^3}{6n^6}M = \frac{M}{6n^6}\cdot\sum_{p=1}^{n}p^3 = \frac{M}{6n^6}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

on a : $$|R_n| \le \frac{M}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty}\frac{M}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} R_n = 0$$

d'où $$\lim_{+\infty} U_n = \frac{1}{2}f'(0)$$

Exercice 5 1/ On pose $g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

donc g est constante sur chacune des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

c'à d $f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ c_2 & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

$c_1 = f(\sqrt{3}) = \text{Arctan}(\sqrt{3}) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi/2$; $c_2 = f(-\sqrt{3}) = -\pi/3 - \pi/6 = -\pi/2$

d'où $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2/ a/ $DL_3(0)$ de f_λ :

On a $\text{arctan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$e^{\text{arctan} x} = e^{x - x^3/3 + o(x^3)} = e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$

$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3}{6} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

• $f_\lambda(x) = (x^2 - \lambda x + 1)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$= 1 + (1-\lambda)x + (1-\lambda)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

b/ $DL_3(+\infty)$ de $\frac{1}{\lambda} f_\lambda(x)$: On pose $X = \frac{1}{x}$ $\quad x \to +\infty \Leftrightarrow X \to 0^+$

$f_\lambda(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{\lambda}{x} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} e^{\text{arctan}\frac{1}{x}} = \frac{1 - \lambda x + x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\pi/2 - \text{Arctan} X}$

$= \frac{e^{\pi/2}}{x} \frac{1 - \lambda x + x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\text{Arctan} X}$

$= \frac{e^{\pi/2}}{x}(1 - \lambda X + X^2)\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{8}X^4 + o(X^4)\right)\left(1 - X + \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + o(X^3)\right)$

$= \frac{e^{\pi/2}}{x}\left(1 - (1+\lambda)X + (1+\lambda)X^2 - \frac{X^3}{3} + \left(\frac{7}{24} - \frac{2\lambda}{3}\right)X^4 + o(X^4)\right)$

$= e^{\pi/2}\left(\frac{1}{x} - (1+\lambda) + (1+\lambda)x - \frac{x^2}{3} + \frac{7-16\lambda}{24} \cdot x^3 + o(x^3)\right) = e^{\pi/2}\left(x - (1+\lambda) + \frac{1+\lambda}{x} - \frac{1}{3x^2} + \frac{7-16\lambda}{24} \cdot \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

c/ $DL_3(-\infty)$ de $\frac{1}{\lambda} f_\lambda(x)$

On pose $X = \frac{1}{x}$; $X \to -\infty \Leftrightarrow X \to 0^-$

$f_\lambda(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{\lambda}{x} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} e^{\text{arctan}\, 1/x} = \frac{1 - \lambda x + x^2}{x^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} X}$

$= -\frac{e^{-\pi/2}}{x}\left(\frac{1 - \lambda X + X^2}{\sqrt{1+X^2}}\right) e^{-\text{Arctan} X} = -e^{-\pi/2}\left(X - (1+\lambda) + \frac{1+\lambda}{X} - \frac{1}{3X^2} + \frac{7-16\lambda}{24} \cdot \frac{1}{X^3} + o\right.$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..